Espace vectoriel normé

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Vocabulaire

1°) Norme

Déf : On appelle norme sur E toute application N de E vers $\mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\forall x \in E$, $N(x)=0 \Rightarrow x=0$ (séparation).

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda.x)=|\lambda| x$ (homogénéité)

3) $\forall x,y \in E$, $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$ (inégalité triangulaire).

Une norme est usuellement notée N ou $\|.\|$.

Prop : Si N est une norme sur E alors

α) $N(0)=0$,

β) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$,

γ) $\forall x,y \in E, |N(x)-N(y)| \leq N(x-y)$.

Déf : On appelle espace vectoriel normé tout couple (E,N) formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme N sur E.

Désormais $(E,\|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

Déf : Un vecteur x de E est dit unitaire lorsque $\|x\|=1$.

Pour $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $u=\dfrac{1}{\|x\|}x$ est appelé vecteur unitaire associé à x.

Déf : Une partie A de E est dite bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|x\| \leq M$.

2°) Distance associée à une norme

Déf : On appelle distance sur un ensemble X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1) $\forall x,y \in X, d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (séparation),

2) $\forall x,y \in X, d(x,y)=d(y,x)$ (symétrie)

3) $\forall x,y,z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Déf : On appelle distance associée à la norme $\|.\|$ l'application définie par $d(x,y)=\|y-x\|$ pour tout $x,y \in E$.
On vérifie aisément qu'il est ainsi défini une distance sur E. figure.

Déf : Soit x un vecteur de E et A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On appelle distance de a à A. le réel $d(x,A)=\inf\limits_{y \in A} d(x,y)$.

Déf : Soit A une partie bornée de E. On appelle diamètre de A le réel $\delta(A)=\inf\limits_{x,y \in A} d(x,y)$.

3°) Boules ouverte, boule fermée

Déf : Soit $a \in E$ et $r>0$. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a,r)=\{x \in E / d(x,a)<r\}$. Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ et sphère $S(a,r)$.

Déf : Les boules de centre 0 et de rayon 1, sont appelées boules unités.

Prop : $B(a,r)=a+rB(0,1)$ et $\overline{B}(a,r)=a+r\overline{B}(0,1)$.

Prop : $B(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ sont bornées.

Prop : $B(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ sont convexes.

4°) Norme produit

Soit $(E_1,\|.\|_1),\dots,(E_n,\|.\|_n)$ des espaces vectoriels normés et $E=E_1\times\cdots\times E_n$. Pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$, on pose $\|x\|=\max_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$.

Prop : $\|.\|$ définit une norme sur E.

Déf : Cette norme est appelé norme produit sur $E=E_1\times\cdots\times E_n$.

Prop : Pour $a=(a_1,\dots,a_n)\in E$ et $r>0$: $B(a,r)=\prod_{i=1}^{n}B_i(a_i,r)$.

II. Normes usuelles

1°) Sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, on pose $\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$, $\|x\|_2=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$ et $\|x\|_\infty=\max\left(|x_1|,\dots,|x_n|\right)$.

Théorème :

$\|.\|_1,\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Culture : Plus généralement, pour $p\ge1$, $\|x\|_p=\left(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{1/p}$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$ et

$\|x\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p$.

2°) Sur un espace de dimension finie

Théorème :

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut-être muni d'une norme.

3°) Sur des espaces de suites

Déf : On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u=(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sommables i.e. telle que la série $\sum|u_n|$ soit convergente.

On note $\ell^2(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u=(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable i.e. telle que la série $\sum|u_n|^2$ soit convergente.

On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u=(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornées.

Théorème :

$\ell^1(\mathbb{K}),\ell^2(\mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ respectivement normés par

$\|u\|_1=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$, $\|u\|_2=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{1/2}$ et $\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

4°) Sur des espaces de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non singulier.

Déf : On note $L_c^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{K}$ continues et intégrables.

On note $L_c^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{K}$ continues et de carré intégrable.

On note $L_c^\infty(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{K}$ continues et bornées.

Théorème :

$L_c^1(I,\mathbb{K})$, $L_c^2(I,\mathbb{K})$ et $L_c^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ respectivement normés par :

$\|f\|_1=\int_I|f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\|f\|_2=\left(\int_I|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty=\sup_{t\in I}|f(t)|$.

Déf : $\|.\|_1$ est appelée norme de la convergence en moyenne

$\|.\|_2$ est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

$\|.\|_\infty$ est appelée norme de la convergence uniforme.

5°) Sur une algèbre

Soit $(A,+,\times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.

Déf : On appelle norme d'algèbre sur A toute application $\|.\|:A\to\mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\|.\|$ est une norme sur A,

2) $\forall x,y\in A,\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$ (sous-multiplicaticité)

Le couple (A,N) est alors appelé algèbre normé.

6°) Comparaison de normes

Déf : Une norme N_2 sur E est dite dominée par une norme N_1 ssi $\exists\alpha>0,\forall x\in E,N_2(x)\leq\alpha N_1(x)$.

Déf : Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites équivalentes ssi elle se domine mutuellement i.e. : $\exists\alpha,\beta>0,\forall x\in E,\alpha N_2(x)\leq N_1(x)\leq\beta N_2(x)$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur les normes de E.

Prop : Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes alors toute boule pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre pour l'autre norme.

Théorème :

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).

III. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

$(E,\|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

1°) Suites bornées

Déf : Une suite $u=(u_n)$ d'éléments de E est dite bornée ssi $\exists M\in\mathbb{R}^+,\forall n\in\mathbb{N},\|u_n\|\leq M$. On note $\ell^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de E.

Prop : $\ell^\infty(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application définit par $\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|$ y définit une norme.

2°) Convergence

Déf : On dit qu'une suite $u=(u_n)$ d'éléments de E converge vers $\ell\in E$ (pour la norme $\|.\|$) ssi $\|u_n-\ell\|\to 0$ i.e. : $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n\geq N\Rightarrow\|u_n-\ell\|\leq\varepsilon$.

On note alors $u\to\ell$ ou $u_n\xrightarrow{\|.\|}\ell$.

Théorème :

Si $u_n\to\ell$ et $u_n\to\ell'$ alors $\ell=\ell'$.

Déf : On dit qu'une suite $u=(u_n)$ d'éléments de E converge ssi il existe $\ell\in E$ tel que $u_n\to\ell$. Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de u et on note $\ell=\lim u$ ou $\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Théorème :

Si $\|u_n-\ell\|\leq v_n$ et $v_n\to 0$ alors $u_n\to\ell$.

Cor : Si la suite u_n converge vers ℓ pour la norme N_1 et si N_2 est une norme dominée par N_1 alors u_n converge vers ℓ pour la norme N_2. En conséquence, la notion en cours est inchangée lorsqu'on passe à une norme équivalente.

3°) Opérations sur les limites

Théorème :

Si $u_n\to\ell$ et $v_n\to\ell'$ alors $\lambda u_n+\mu v_n\to\lambda\ell+\mu\ell'$.

Si de plus, E est une algèbre normée $u_nv_n\to\ell\ell'$.

Par suite l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel (ou sous-algèbre) de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application $u\mapsto\lim u$ y définit une application linéaire (ou morphisme d'algèbre)

Prop : Si $\alpha_n \in \mathbb{K} \to \alpha$ et $u_n \to \ell$ alors $\alpha_n.u_n \to \alpha.\ell$.

Prop : Si $u_n \to \ell$ alors $\|u_n\| \to \|\ell\|$.

Par conséquent toute suite convergente est bornée.

4°) Cas particuliers

a) suite d'un espace produit

Soit $(E_1,\|.\|_1),\ldots,(E_n,\|.\|_n)$ des espaces vectoriels normés. On munit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ de la norme produit. Soit $u = (u^p)$ une suite d'éléments de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p = (u_1^p,\ldots,u_n^p)$.

Déf : Les suites $u_i = (u_i^p)$ sont appelées suites coordonnées de la suite u.

Prop : La suite u est bornée ssi ses suites coordonnées le sont.

Prop : La suite u converge ssi ses suites coordonnées convergent et si tel est le cas :
$\lim u^p = (\lim u_1^p,\ldots,\lim u_n^p)$.

b) suite d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit $u = (u^p)$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u^p = u_1^p e_1 + \cdots + u_n^p e_p$.

Déf : Les suites $u_i = (u_i^p)$ sont appelées suites composantes de la suite u dans $\mathcal{B}$.

Prop : La suite u est bornée ssi ses suites composantes le sont.

Prop : La suite u converge ssi ses suites composantes convergent et si tel est le cas :
$\lim u^p = (\lim u_1^p)e_1 + \cdots + (\lim u_n^p)e_p$.

5°) Comparaison

Déf : On dit qu'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E est dominée par (resp. négligeable devant) une suite réelle $\alpha = (\alpha_n)$ ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq M|\alpha_n|$.
(resp. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon|\alpha_n|$)
On note alors $u_n = O(\alpha_n)$ (resp. $u_n = o(\alpha_n)$)

Prop : Si (α_n) ne s'annule pas :

$u_n = O(\alpha_n) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha_n} u_n\right)$ est bornée.

$u_n = o(\alpha_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_n} u_n \to 0$.

Déf : On dit que la suite (u_n) équivaut à la suite (v_n) ssi $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$. On note $u_n \sim v_n$.

Prop : La relation $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $E^{\mathbb{N}}$.

IV. Topologie

$(E,\|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

1°) Voisinage

Déf : On appelle voisinage d'un élément a de E toute partie V de E contenant une boule centrée en a i.e. telle que : $\exists \alpha > 0, B(a,\alpha) \subset V$.

Prop : Si V est un voisinage de a et W une partie de E contenant V alors W est un voisinage de a.

Prop : Si $V_1,\ldots,V_n$ sont des voisinages de a alors $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ est un voisinage de a.

Prop : Si $a,b \in E$ sont distincts alors il existe des voisinages de a et b disjoints.

2°) Ouverts et fermés

a) parties ouvertes

Déf : Une partie U de E est dite ouverte ssi elle est voisinage de chacun de ses points i.e. : $\forall a \in U, \exists \alpha > 0, B(a,\alpha) \subset U$. On dit encore que U est un ouvert de E .

Prop : Une réunion (finie ou infinies) de parties ouvertes est ouverte.

Prop : Une intersection finie de parties ouvertes est un ouverte.

Prop : Si $U_1,\ldots,U_n$ sont des parties ouvertes des espaces vectoriels normés $E_1,\ldots,E_n$ alors $U_1 \times \cdots \times U_n$ est une partie ouverte de l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

b) parties fermées

Déf : Une partie F de E est dite fermée ssi son complémentaire est une partie ouverte. On dit encore que F est un fermé de E .

*Prop :*Une intersection (finie ou infinie) de parties fermées est fermée.

Prop : Une union finie de parties fermées est fermée.

Théorème :

Pour une partie F de E , on a équivalence entre :
(i) F est fermée
(ii) $\forall (u_n) \in F^{\mathbb{N}}, u_n \to \ell \Rightarrow \ell \in F$.

Prop : Si $F_1,\ldots,F_n$ sont des parties fermées des espaces vectoriels normés $E_1,\ldots,E_n$ alors $F_1 \times \ldots \times F_n$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

3°) Intérieur et adhérence

a) point intérieur

Déf : Un élément $a \in E$ est dit intérieur à une partie A ssi A est voisinage de a i.e. $\exists \alpha > 0, B(a,\alpha) \subset A$. On note A° l'ensemble des points intérieurs à A appelé intérieur de A .

Théorème :

A° est la réunion des ouverts inclus dans A .
Par suite A° est un ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A .

Cor : Une partie A est ouverte ssi $A^\circ = A$

b) point adhérent

Déf : Un point $a \in E$ est dit adhérent à une partie A ssi $\forall \alpha > 0, A \cap B(a,\alpha) \neq \varnothing$.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A appelé adhérence de A .

Prop : $C_E\overline{A} = \left(C_E A\right)^\circ$.

Théorème :

$\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A . Par suite $\overline{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A .

Cor : Une partie A est fermée ssi $\overline{A} = A$.

Théorème :

Soit $a \in E$ et A une partie de E . On a équivalence entre :
(i) a est adhérent à A ,
(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a .

c) frontière

Déf : On appelle frontière d'une partie A de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Prop : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E A}$ et donc $\mathrm{Fr}(A)$ est une partie fermée.

4°) Densité

Déf : Une partie A de E est dite dense ssi $E = \overline{A}$.
Une partie A de E est dite dense dans B ssi $B \subset \overline{A}$.

Théorème :

On a équivalence entre :

(i) A est dense dans B,

(ii) $\forall b \in B, \forall \alpha > 0, B(b,\alpha) \cap A \neq \varnothing$,

(iii) $\forall b \in B, \exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \to b$.

5°) Topologie relative

Soit A une partie de E.

Déf : On appelle voisinage de $a \in \overline{A}$ relatif à A, tout ensemble de la forme $A \cap V$ avec V voisinage de a dans E.

Déf : On appelle ouvert relatif à A tout ensemble de la forme $A \cap U$ avec U ouvert de E.

Déf : On appelle fermé relatif à A tout ensemble de la forme $A \cap F$ avec F fermé de E.

Prop : Une partie de A est un fermé relatif ssi son complémentaire dans A est un ouvert relatif.

V. Compacité

$(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

1°) Valeurs d'adhérence d'une suite

Déf : On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $u = (u_n)$ d'éléments E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (extractrice)

Prop : Si w est une suite extraire d'une suite v elle-même extraite d'une suite u alors w est extraite de u.

Prop : Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Déf : On appelle valeur d'adhérence d'une suite u d'éléments de E toute limite d'une suite convergente extraite de u. On note $\mathrm{Adh}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite u.

2°) Partie compacte

Déf : Une partie K de E est dite compacte ssi toute suite d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K i.e. que de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une suite convergeant dans K.

Prop : Toute partie compacte est fermée et bornée.

Prop : Toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Prop : Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties compactes de $E_1, \ldots, E_n$ alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est une partie compacte de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

3°) Compacité en dimension finie

lemme :

De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}^n$, on peut extraire une suite convergente.

Théorème :

Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.

Les parties compactes sont assurément de cette forme. Etudions la réciproque.

Soit K une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$ alors $E = \{0\}$ et $K = \varnothing$ ou $K = \{0\}$. Dans les deux cas K est compacte.

Sinon, on peut introduire une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $u = (u^p)$ une suite d'éléments de K.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $(u_1^p, \ldots, u_n^p)$ le n-uplet des composantes de u^p dans $\mathcal{B}$. C'est le terme général d'une suite bornée de $\mathbb{K}^n$ donc on peut en extraire une suite convergente $(u_1^{\varphi(p)}, \ldots, u_n^{\varphi(p)})$ de limite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

On a alors $u_{\varphi(n)} \to \ell = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. De plus $u_{\varphi(n)} \in K$ et K fermé donc $\ell \in K$. Ainsi K est compact.

Cor : De toute bornée d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie on peut extraire une suite convergente.

VI. Complétude

$(E,\|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

1°) Suite de Cauchy

Déf : Une suite (u_n) d'éléments de E est dite être de Cauchy ssi elle vérifie la relation :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq n_0, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$ (critère de Cauchy)

Prop : Toute suite convergente est de Cauchy.

Prop : Toute suite de Cauchy est bornée.

Prop : Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

2°) Espaces de Banach

Déf : Un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ est dit complet ssi toute suite de Cauchy d'éléments de E converge.

On dit alors que $(E,\|.\|)$ est un espace de Banach (ou algèbre de Banach si E est une $\mathbb{K}$-algèbre)

Théorème :

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach.

Plus généralement :

Théorème :

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

Théorème :

$\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$ est un espace de Banach.

3°) Partie complète

Déf : On appelle partie complète d'un espace vectoriel normé (E,N) toute partie A de E telle que toute suite de Cauchy d'éléments de A admet une limite qui appartient à A.

Prop : Les parties complètes sont fermées.

Prop : Les parties fermées d'un espace de Banach sont complètes.

VII. Série d'éléments d'un espace vectoriel normé

1°) Vocabulaire

Déf : Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.

Le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de la série.

Déf : On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite (S_n) converge.

Sa limite est alors appelée la somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2°) Série absolument convergente dans un espace de Banach

Déf : Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dit ACV ssi la SATP $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème :

Si $\sum u_n$ est une série ACV d'éléments d'un espace de Banach alors celle-ci converge et $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

3°) Série géométrique

Soit $(A,\|.\|)$ une algèbre de Banach de neutre multiplicatif 1_A.

Théorème :

Si a est un élément de A vérifiant $\|a\|<1$ alors la série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ est ACV et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est l'inverse de l'élément $1_A - a$.

4°) Série exponentielle

Soit $(A,\|.\|)$ une algèbre de Banach de neutre multiplicatif 1_A.

Théorème :

Pour tout a élément de A la série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ est ACV.

Sa somme est appelé exponentielle de a et est notée $\exp(a)$.

lemme :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV alors pour $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, $\sum w_n$ est ACV et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Prop : $\forall a,b \in A$, $ab = ba \Rightarrow \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Prop : $\forall a \in A$, $\exp(a) \in U(A)$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.